

е) выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T \int_0^\pi \{u_t(t, x) \cdot V_t(t, x) - 2u_{tx}(t, x) \cdot V_x(t, x) + u_{xxx}(t, x) \cdot V_x(t, x) + \\ + F(u(t, x)) \cdot V(t, x)\} dx dt + \int_0^\pi \psi(x) \cdot V(0, x) dx = 0 \quad (4)$$

для любой функции $V(t, x)$, обладающей свойствами

$$V(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]), V_t(t, x) \in L((0, T) \times (0, \pi)), V_x(t, x) \in L([0, T]; L_2(0, \pi)), \quad (5)$$

$$V(T, x) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad V(t, 0) = V(t, \pi) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

где

$$F(u(t, x)) \equiv F(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x)). \quad (7)$$

§1. Вспомогательные факты.

С целью исследования обобщённого решения задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^\infty$ образует базис в пространстве $L_2(0, \pi)$, то очевидно, что каждое обобщённое решение $u(t, x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t) \sin nx, \quad (8)$$

где

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t, x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]). \quad (9)$$

Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n(t) = (1 + n^2 t) \cdot e^{-n^2 t} \cdot \varphi_n + t e^{-n^2 t} \cdot \psi_n + \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi F(u(\tau, x)) \sin nx \cdot (t - \tau) e^{-n^2(t-\tau)} dx d\tau \\ (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]), \quad (10)$$

где оператор F определён соотношением (7) и

$$\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nxdx, \quad \psi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

2. Исходя из определения обобщённого решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Пусть $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ - любое обобщённое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяют системе (10).

3. Обозначим через $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ совокупность всех функций $u(t, x)$ вида (8), рассматриваемых на $[0, T] \times [0, \pi]$, для которых все функции $u_n(t) \in C^{(l)}([0, T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < +\infty,$$

где $l \geq 0$ - целое число, $\alpha_i \geq 0$ ($i = \overline{0, l}$), $1 \leq \beta_i \leq 2$ ($i = \overline{0, l}$). Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Известно (см. [1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t, x) \in B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}} \equiv \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq \tau \leq T} |u_n^{(i)}(\tau)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \quad (0 \leq t \leq T). \quad (12)$$

4. Для функции $u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ функцию $u_n(t)$ назовём её n -той компонентой. Пусть \bullet_n^* - любое непустое множество из пространства $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$. Совокупность n -тых компонент всех функций из \bullet_n^* обозначим через \bullet_n^* . Справедлива (см. [1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества $\bullet_n^* \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ в $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого фиксированного n ($n = 1, 2, \dots$) множество \bullet_n^* компактно в $C^{(l)}([0, T])$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε , один и тот же для всех

$u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in \bullet_n^*$, такой, что

$$\sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon \quad \forall u \in \bullet_n^*.$$

5. Очевидно, что если $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,T}^k$ ($k \geq 1$ - целое число), то $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_{1,t}^{k-1}} &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)| \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^k \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)| \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B_{2,t}^k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\forall u \in B_{2,2,T}^{i,j} \quad \|u\|_{B_{1,1,t}^{i-1,j-1}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B_{2,2,t}^{i,j}} \quad (i, j \geq 1; 0 \leq t \leq T). \quad (14)$$

6. Пусть для натурального числа k :

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0, \pi]), \quad \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0, \pi), \quad \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \quad \left(s = 0, \left[\frac{k-1}{2} \right] \right). \quad (15)$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечётного k) и равенством Парсеваля (для чётного k), легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k \cdot \varphi_n)^2 \leq \frac{2}{\pi} \cdot \|\varphi^{(k)}(x)\|_{L_2(0, \pi)}^2, \quad (16)$$

где $\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx$ ($n = 1, 2, \dots$), причём очевидно, что оценка (16) верна и при $k = 0$, если $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$.

§2. Исследование единственности обобщённого решения задачи (1)-(3).

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $F(t, x, u_1, \dots, u_6) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^6)$.
2. $\forall R > 0$ в $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty) \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)$

$$|F(t, x, u_1, \dots, u_6) - F(t, x, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_6)| \leq C_R \cdot \sum_{i=1}^6 |u_i - \tilde{u}_i|, \quad (17)$$

где $C_R > 0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного обобщённого решения.

§3. Исследование существования в малом обобщённого решения задачи (1)-(3).

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) обобщённого решения задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(2)}([0, \pi])$, $\varphi'''(x) \in L_2(0, \pi)$ и $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$;
 $\psi(x) \in C([0, \pi])$, $\psi'(x) \in L_2(0, \pi)$ и $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$.
2. $F(t, x, u_1, \dots, u_6) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^6)$.
3. $\forall R > 0$ в $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty) \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)$
 $|F(t, x, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) - F(t, x, u_1, u_2, u_3, \tilde{u}_4, u_5, \tilde{u}_6)| \leq C_R \cdot (|u_4 - \tilde{u}_4| + |u_6 - \tilde{u}_6|)$, (18)

где $C_R > 0$ - постоянная.

Тогда существует в малом обобщённое решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Так как доказательство данной теоремы очень длинное, то мы ограничимся лишь приведением идеи (схемы) доказательства данной теоремы. Итак, для каждого фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ определим в $B_{2,2,T}^{3,1}$ оператор (относительно V) \mathcal{F}_u :

$$\mathcal{F}_u(V(t, x)) = \tilde{V}(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n(t) \sin nx, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(t) &= (1 + n^2 t) \cdot e^{-n^2 t} \cdot \varphi_n + t e^{-n^2 t} \cdot \psi_n + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi \mathcal{Q}_n(V(\tau, x)) \sin nx \cdot (t - \tau) e^{-n^2(t-\tau)} dx d\tau \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]), \end{aligned} \quad (20)$$

числа φ_n, ψ_n ($n = 1, 2, \dots$) определены соотношением (11) и

$$\mathcal{Q}_n(V(t, x)) \equiv F(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), V_{xxx}(t, x), u_t(t, x), V_{tx}(t, x)). \quad (21)$$

Очевидно, что

$$\forall u \in B_{2,2,T}^{3,1} \quad \mathcal{Q}_n(u(t, x)) = F(u(t, x)), \quad (22)$$

где оператор F определён соотношением (7).

Из (20) получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$

$$\forall V \in B_{2,2,T}^{3,1} :$$

$$\|\mathcal{F}_u(V)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \equiv \|\tilde{V}\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \equiv \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n(t) \sin nx \right\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \leq a_0 + \frac{39}{\pi} \cdot \int_0^T \int_0^\pi \{\mathcal{Q}_n(V(\tau, x))\}^2 dx d\tau, \quad (23)$$

где

$$a_0 \equiv 12 \sum_{n=1}^{\infty} (n^3 \cdot \varphi_n)^2 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \psi_n)^2, \quad (24)$$

причём конечность a_0 следует из (16) (для $k = 3$ и $k = 1$).

Далее, в силу структуры пространства $B_{1,1,T}^{2,0}$, $\forall \tau \in [0, T]$ имеем:

$$\left\| u_{x^i \tau^j}(\tau, x) \right\|_{C([0, \pi])} \leq \|u\|_{B_{1,1,\tau}^{2,0}} \quad (0 \leq i + 2j \leq 2). \quad (25)$$

Кроме того, при любом $V \in B_{2,2,T}^{3,1}$ $\forall \tau \in [0, T]$:

$$\int_0^\pi V_{xxx}^2(\tau, x) dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \|V\|_{B_{2,2,\tau}^{3,1}}^2, \quad \int_0^\pi V_{\tau x}^2(\tau, x) dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \|V\|_{B_{2,2,\tau}^{3,1}}^2. \quad (26)$$

В силу (25), для любого $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ существует такое число $R = R_u > 0$, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \pi]$:

$$-R_u \leq u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_t(t, x) \leq R_u. \quad (27)$$

Тогда, в силу (18), $\forall u \in B_{1,1,T}^{2,0}$, $V \in B_{2,2,T}^{3,1}$, $\tau \in [0, T]$ и $x \in [0, \pi]$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathfrak{R}_u(V(\tau, x)) \right\}^2 &\leq 2 \left\{ \left[\mathfrak{R}_u(V(\tau, x)) - \mathfrak{R}_u(0) \right]^2 + \left[\mathfrak{R}_u(0) \right]^2 \right\} \leq \\ &\leq 4C_{R_u}^2 \cdot \left\{ V_{xxx}^2(\tau, x) + V_{\tau x}^2(\tau, x) \right\} + 2 \mathfrak{R}_u^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где \mathfrak{R}_u - максимум функции $|F(t, x, u_1, u_2, u_3, 0, u_5, 0)|$ в замкнутой области $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq \pi$, $-R_u \leq u_1, u_2, u_3, u_5 \leq R_u$.

Теперь, пользуясь оценками (26) и (28), из (23) получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ $\forall V \in B_{2,2,T}^{3,1}$:

$$\left\| \mathfrak{R}_u(V) \right\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \leq a_0 + 78T \cdot \mathfrak{R}_u^2 + 156T \cdot C_{R_u}^2 \cdot \|V\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2. \quad (29)$$

Из (29) следует, что для любого фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ оператор \mathfrak{R}_u действует в $B_{2,2,T}^{3,1}$, причём ограниченно.

Теперь, пользуясь соотношениями (19), (20), условием (18) (для $R = R_u$) и оценками (26) (для $V = V_1 - V_2$), аналогично (23), методом математической индукции получаем, что при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,2,T}^{3,1}$ и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \mathfrak{J}_l(V_1) - \mathfrak{J}_l(V_2) \right\|_{B_{2,2,t}^{3,1}}^2 \leq (78C_{R_u}^2)^k \cdot \|V_1 - V_2\|_{B_{2,2,t}^{3,1}}^2 \cdot \frac{t^k}{k!}, \quad (30)$$

где k - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,2,T}^{3,1}$:

$$\left\| \mathfrak{J}_l(V_1) - \mathfrak{J}_l(V_2) \right\|_{B_{2,2,T}^{3,1}} \leq q_k(u) \cdot \|V_1 - V_2\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}, \quad (31)$$

где

$$q_k(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}} \cdot (78T \cdot C_{R_u}^2)^k. \quad (32)$$

Очевидно, что для достаточно больших $k = k_u$: $q_k(u) < 1$. Для таких k оператор \mathcal{A}_i оказывается сжатым в пространстве $B_{2,2,T}^{3,1}$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B_{2,2,T}^{3,1}$ неподвижная точка V оператора \mathcal{A}_i является и единственной в $B_{2,2,T}^{3,1}$ неподвижной точкой оператора \mathcal{A}_i :

$$V = \mathcal{A}_i(V), \quad V \in B_{2,2,T}^{3,1}. \quad (33)$$

Сопоставив каждому $u \in B_{1,1,T}^{2,0}$ единственную в $B_{2,2,T}^{3,1}$ неподвижную точку V оператора \mathcal{A}_i порождаем оператор H :

$$H(u) = V = \mathcal{A}_i(V), \quad (34)$$

действующий из $B_{1,1,T}^{2,0}$ в $B_{2,2,T}^{3,1}$.

Далее показывается, что оператор H действует из $B_{1,1,T}^{2,0}$ в $B_{2,2,T}^{3,1}$ непрерывно и, тем более, он действует в $B_{1,1,T}^{2,0}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B_{1,1,T}^{2,0}$. Пусть $\odot = \odot_R$ - любой замкнутый шар пространства $B_{1,1,T}^{2,0}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда, в силу (25), очевидно, что при любом $u \in \odot_R \forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \pi]$:

$$-R \leq u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_t(t, x) \leq R. \quad (35)$$

Тогда, пользуясь неравенством (18), оценкой (28) (для $R_u = R$) и оценками (26), аналогично (23) и (29) получаем, что при любом $u \in \odot_R \forall t \in [0, T]$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \equiv \|V\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \equiv \|\mathcal{A}_i(V)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \leq a_0 + 78T \cdot \mathfrak{V}_R^2 + 156C_R^2 \cdot \int_0^t \|V\|_{B_{2,2,\tau}^{3,1}}^2 d\tau, \quad (36)$$

где число a_0 определено соотношением (24), а \mathfrak{V}_R - максимум функции $|F(t, x, u_1, u_2, u_3, 0, u_5, 0)|$ в замкнутой области $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi, -R \leq u_1, u_2, u_3, u_5 \leq R$.

Из (36), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in \odot_R$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \equiv \|V\|_{B_{2,2,T}^{3,1}}^2 \leq (a_0 + 78T \cdot \mathfrak{V}_R^2) \cdot \exp\{156C_R^2 \cdot T\} \equiv a_R^2. \quad (37)$$

Следовательно, множество $H(\odot_R)$ ограничено в $B_{2,2,T}^{3,1}$.

Далее, показывается, что при любом $u \in \odot_R \forall t \in [0, T]$:

$$|V_n''(t)| \leq n^4 \cdot |\varphi_n| + 2n^2 \cdot |\psi_n| + 4n^2 \cdot T + 2 + 4(2n^2 \cdot T + 1) \cdot (2C_R^2 \cdot a_R^2 + \mathfrak{B}_R^2), n = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

где $H(u) = V \equiv \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin nx$.

Тогда из (37) и (38) следует, что для каждого фиксированного n ($n = 1, 2, \dots$) семейство

$$(H(\mathfrak{C}_R))_n \equiv \left\{ V_n(t) : \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin kx \equiv V(t, x) = H(u(t, x)), u \in \mathfrak{C}_R \right\} \quad (39)$$

ограничено в $C^{(2)}([0, T])$, и, следовательно, по теореме Арцела, компактно в $C^{(1)}([0, T])$.

Таким образом, для $H(\mathfrak{C}_R)$, рассматриваемого как подмножество пространства $B_{1,1,T}^{2,0}$, выполнено условие *a*) теоремы 1 для пространства $B_{1,1,T}^{2,0}$ о критерии компактности множеств в этом пространстве. А из оценок

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |V_n(t)| \leq \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \|V\|_{B_{2,2,T}^{3,1}} \leq a_R \cdot \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (40)$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |V_n'(t)| \leq \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \|V\|_{B_{2,2,T}^{3,1}} \leq a_R \cdot \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (41)$$

где N - любое натуральное число, а $a_R \geq 0$ - число, фигурирующее в (37), следует, что для $H(\mathfrak{C}_R)$, рассматриваемого как подмножество пространства $B_{1,1,T}^{2,0}$, выполнено условие *b*) теоремы 1 для пространства $B_{1,1,T}^{2,0}$ о критерии компактности множеств в этом пространстве.

Таким образом, оператор H переводит каждый шар $\mathfrak{B}_R \subset B_{1,1,T}^{2,0}$ в множество $H(\mathfrak{C}_R)$, компактное в $B_{1,1,T}^{2,0}$. Следовательно, оператор H действует в $B_{1,1,T}^{2,0}$ компактно. Так как оператор H действует в $B_{1,1,T}^{2,0}$ и непрерывно, то он действует в $B_{1,1,T}^{2,0}$ вполне непрерывно.

Далее, в силу оценок (14) (для $i = 3, j = 1$) и (37), $\forall u \in \mathfrak{C}_R$ имеем:

$$\|H(u)\|_{B_{1,1,T}^{2,0}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot a_R = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot (a_0 + 78T \cdot \mathfrak{B}_R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\{78T \cdot C_R^2\}. \quad (42)$$

Из (42) видно, что если число

$$R > \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{a_0} \quad (43)$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T

$$\forall u \in \mathbb{S}_R \quad \|H(u)\|_{B_{1,1,T}^{2,0}} \leq R,$$

т.е. $H(\mathbb{S}_R) \subset \mathbb{S}_R$.

Таким образом, для любого фиксированного R , удовлетворяющего условию (43), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар \mathbb{S}_R в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в $\mathbb{S}_R \subset B_{1,1,T}^{2,0}$ по крайней мере одну неподвижную точку u :

$$u = H(u). \quad (44)$$

Так как $u = H(u) = V = \mathcal{J}_i(V)$, то $u = V$ и, следовательно

$$u = H(u) = \mathcal{J}_i(u).$$

Тогда, в силу (22),

$$\mathcal{J}_i(u) = F(u)$$

и, следовательно, для найденной неподвижной точки $u = u(t, x) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ функции $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяют системе (10).

Кроме того, так как оператор H действует из $B_{1,1,T}^{2,0}$ в $B_{2,2,T}^{3,1}$, то для най-

денной неподвижной точки $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ оператора H имеем:

$$u(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,1}. \quad (45)$$

Далее, проверяется, что найденная функция $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,2,T}^{3,1}$ является обобщённым решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание. Следует отметить, что условия 1 теоремы 3, наложенные на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не только достаточны, но и необходимы для существования обобщённого решения задачи (1)-(3).

§4. Исследование существования в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

В этом параграфе с помощью усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке доказана следующая теорема о существовании в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. В $[0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^6$

$$|F(t, x, u_1, \dots, u_6)| \leq C \cdot (1 + |u_1| + \dots + |u_6|), \quad (46)$$

где $C > 0$ - постоянная.

Тогда существует обобщённое решение задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс ... докт. физ.-мат. наук, Баку, 1973 г., Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ BİPARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİNİN TƏDQIQI. I.

K.İ.XUDAVERDİYEV, M.N.HEYDƏROVA

XÜLASƏ

İş dördüncü tərtib yarım-xətti bипarabolik tənlik üçün birölçülü qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinə tərif verilir. Furiye metodunu tətbiq etdikdən sonra baxılan məsələnin həlli axtarılan $u(t, x)$ həllinin $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ sisteminə görə naməlum $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) Furiye əmsallarına nəzərən müəyyən qeyri-xətti hesabi integro-diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra isə baxılan qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin qlobal yeganəliyi, lokal və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.

STUDY OF GENERALIZED SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR FOURTH ORDER BIPARABOLİK EQUATION. I.

K.I.KHUDAVERDIYEV, M.N.HAYDAROVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of generalized solution of one-dimensional mixed problem for a semi-linear fourth order bипarabolik equation. Conception of generalized solution for mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integro-differential equations in unknown Fourier coefficients $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) of the sought solution $u(t, x)$ based on the system $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Besides, uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the generalized solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.